

SÉRIE A, N° 78.

N° D'ORDRE :

96.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

M. B. JEKHOWSKY,

Licencié es Sciences.

1^{re} THÈSE. — APPLICATIONS D'UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR LE CALCUL
DES PERTURBATIONS D'UNE PETITE PLANÈTE OU D'UNE
COMÈTE ET POUR LA DÉTERMINATION DE L'ORBITE D'UNE
COMÈTE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *2 Mars* ~~Février~~ 1916, devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL,	<i>Président,</i>
ANDOYER,	{ <i>Examineurs.</i>
CARTAN,	

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

11/11/11

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

M. B. JEKHOWSKY,

Licencié ès Sciences.

1^{re} THÈSE. — APPLICATIONS D'UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR LE CALCUL
DES PERTURBATIONS D'UNE PETITE PLANÈTE OU D'UNE
COMÈTE ET POUR LA DÉTERMINATION DE L'ORBITE D'UNE
COMÈTE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

2 Mars

Soutenues le ~~Février~~ 1916, devant la Commission d'Examen.



MM. APPELL,
ANDOYER,
CARTAN,

Président,
Examineurs.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen.....	P. APPELL, Professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires. {	CH. WOLF.	
	J. RIBAN.	
Professeurs.....	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KÖENIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zool. (Évolution des êtres organisés)
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	ÉMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comp.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD.....	Mathématiques générales.
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	N.....	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Histologie.
Professeurs adjoints...	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HEROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.)
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zool. (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire.....	D. TOMBECK.	

A LA MÉMOIRE

DE

MA MÈRE.

A

MON PÈRE.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A

MONSIEUR H. ANDOYER.

Hommage respectueux et reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE.

APPLICATIONS D'UNE MÉTHODE NOUVELLE

POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS

D'UNE PETITE PLANÈTE OU D'UNE COMÈTE

ET POUR LA DÉTERMINATION

DE L'ORBITE D'UNE COMÈTE.

AVANT-PROPOS.

Dans un Mémoire récent, inséré au *Bulletin astronomique* (t. XXXII, 1915), M. H. Andoyer a indiqué brièvement les avantages qu'on pourrait trouver, tant au point de vue analytique qu'au point de vue pratique, à regarder le coefficient d'attraction qui figure dans les équations d'un mouvement képlérien, non plus comme une constante absolue, mais comme un paramètre au même titre que les autres éléments du mouvement.

Le présent travail a pour objet le développement détaillé de quelques applications pratiques de cette nouvelle façon d'envisager l'un des principaux problèmes de la Mécanique céleste élémentaire.

Dans la première partie de ce travail je passe en revue les points principaux du Mémoire de M. Andoyer et j'établis les

équations telles qu'elles doivent être employées pour l'exécution du calcul des perturbations d'une petite planète. Je donne les formules nécessaires avec tous les détails sur leur emploi pour le calcul des perturbations par les quadratures mécaniques et j'établis les formules de passage aux éléments osculateurs ordinaires. Enfin je donne un exemple (62) Erato, en mettant en évidence les différences qu'on trouve d'une part directement en employant les formules dont il s'agit et d'autre part en me référant aux Tableaux d'Oppolzer.

Dans la deuxième partie de ce travail je montre les avantages qu'on peut tirer de l'idée que nous fournit M. Andoyer, au point de vue du calcul d'une orbite d'excentricité voisine de l'unité en faisant abstraction des perturbations, et je donne le résultat du calcul pour la comète Tuttle. Puis, j'établis les équations nécessaires pour le calcul des perturbations d'une comète d'excentricité très voisine de l'unité, en faisant l'hypothèse $e = 1$, et je donne les formules de passage aux éléments osculateurs ordinaires. Enfin je donne les formules pour le problème inverse, c'est-à-dire quand on connaît les éléments elliptiques et que l'on veut les transformer en éléments paraboliques.

Comme le montre l'exemple, on retrouve par deux moyens différents la même parabole et donc la même ellipse à chaque instant.

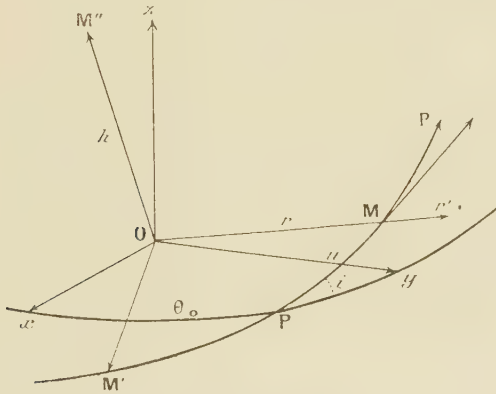
M. H. Andoyer, après m'avoir indiqué ce sujet de travail, m'a donné les conseils et indications nécessaires.

Je lui en suis profondément reconnaissant et je le prie de vouloir bien agréer ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

CHAPITRE I.

1. Considérons le mouvement d'un point matériel M de masse égale à l'unité, rapporté à trois axes rectangulaires fixes Ox , Oy , Oz , et ayant lieu sous l'action d'une force F (fig. 1).

Fig. 1.



Il est avantageux de définir le mouvement à l'aide des variables suivantes :

1° Admettant que le point O joue un rôle particulier dans le mouvement de M , on met en évidence le plan P de l'orbite instantanée de M , passant par O , par M et par la vitesse de M ; on introduit donc la longitude θ_0 du nœud ascendant et l'inclinaison correspondante i de ce plan sur le plan Oxy .

2° La position du point est fixée par le rayon vecteur OM égal à r et par la longitude dans l'orbite φ_0 , comptée à partir de Ox dans Oxy jusqu'au nœud de P , et ensuite dans P .

3° Pour achever de fixer la vitesse, on se sert de sa projection r' sur OM ou vitesse radiale et de la valeur algébrique de son moment linéaire par rapport au point O .

Profitant maintenant des résultats simples bien connus, qui

correspondent au cas où la force se réduit à une attraction newtonienne dirigée vers le point O, on peut faire

$$r = \frac{p_0}{1 + e \cos f} \quad \text{avec} \quad f = \varphi_0 - \varpi_0,$$

de sorte que l'orbite de M dans le plan P soit une section conique variable de paramètre p_0 et d'excentricité e , dont la longitude du périhélie (si O est le Soleil) est ϖ_0 , et dans laquelle f est l'anomalie vraie.

Cette orbite sera osculatrice, au sens astronomique du mot, à l'orbite réelle, si elle est tangente à la vitesse de M, ce qui exige qu'on fasse encore

$$r' = \frac{h}{p_0} e \sin f,$$

comme on le voit, en observant que dans le mouvement l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur a pour tangente trigonométrique $\frac{h}{rr'}$, tandis que, dans la section conique définie par l'équation ci-dessus, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur a pour tangente trigonométrique

$$\frac{p_0}{er \sin f}.$$

Les quantités r et r' étant ainsi exprimées à l'aide de trois variables p_0, e, f (ou ϖ_0), on est en droit d'établir, entre celles-ci et les autres variables si l'on veut, une relation choisie arbitrairement, afin de fixer le changement de variables. En réalité, il ne peut y avoir lieu que d'établir une relation entre h, p_0 et e .

On prend ordinairement dans l'étude du mouvement des petites planètes et des comètes $h = k\sqrt{p_0}$, k étant la constante bien connue de Gauss, égale à la racine carrée du coefficient de l'attraction universelle. Mais on obtiendrait, d'après M. Andoyer, les calculs les plus faciles et les résultats les plus élégants, en supposant constant le paramètre p_0 de la section conique osculatrice.

Voici les équations correspondantes :

Appelons P_0, Q_0, R_0 les projections de la force agissante F sur le rayon vecteur OM, sur la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan P et sur la normale à ce plan; désignons par u l'argument de la latitude $\varphi_0 - \theta_0$, analogue dans une certaine mesure

à l'anomalie vraie f ; introduisons une quantité auxiliaire σ et posons

$$v_0 = v + \sigma, \quad \vartheta_0 = \theta - \sigma, \quad \varpi_0 = \varpi + \sigma;$$

posons encore

$$S_0 = \frac{h}{r^2} + \frac{\rho_0}{h} P_0 - e \sin f \frac{r Q_0}{h}, \quad T_0 = \frac{r R_0 \cos i}{h},$$

et enfin, au lieu de i , employons $j = \sin i$ analogue à e . On aura, représentant par t le temps, les équations

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{h}{r^2}, & \frac{dh}{dt} &= r Q_0, \\ \frac{de}{dt} &= S_0 \sin f, & e \frac{d\varpi}{dt} &= -S_0 \cos f, \\ \frac{dj}{dt} &= T_0 \cos u, & j \frac{d\theta}{dt} &= T_0 \sin u, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \tan g i \tan g \frac{i}{2} \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

L'angle auxiliaire σ n'est défini qu'à une constante près. Si l'on veut conserver l'inclinaison j , ou de même l'angle φ tel que $e = \sin \varphi$, on peut remplacer les équations correspondantes par

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= S_0 \sin f \sec \varphi, & \frac{d\varpi}{dt} &= -S_0 \cos f \cos \sec \varphi, \\ \frac{di}{dt} &= T_0 \cos u \sec i, & \frac{d\theta}{dt} &= T_0 \sin u \cos \sec i. \end{aligned}$$

Si la petitesse de φ ou de i doit faire écarter l'emploi des facteurs $\cos \sec \varphi$ ou $\cos \sec i$, on fera

$$g = e \cos \varpi, \quad g' = e \sin \varpi$$

ou

$$q = j \sin \theta, \quad q' = j \cos \theta$$

et les équations correspondantes deviendront

$$\frac{dg}{dt} = S_0 \sin v, \quad \frac{dg'}{dt} = -S_0 \cos v$$

ou

$$\frac{dq}{dt} = T_0 \sin v, \quad \frac{dq'}{dt} = T_0 \cos v$$

avec

$$\frac{d\sigma}{dt} = T_0 \tan \frac{i}{2} \sec i \sin u.$$

Telles sont les équations nouvelles proposées par M. Andoyer, susceptibles d'être employées avec avantage sans autres modifications dans certains problèmes de Mécanique céleste, comme la théorie de la Lune et celle des satellites de Jupiter, entre autres.

2. Dans un article antérieur du *Bull. astr.* (t. XXX, 1913) et en même temps dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'Amsterdam* (t. XVI, 1913) MM. H. Andoyer et W. de Sitter, chacun de son côté, mais en des termes presque identiques, ont montré comment on pouvait généraliser un résultat dû à M. Levi-Civita, sur l'emploi de l'anomalie excentrique, comme élément canonique, au lieu de l'anomalie moyenne. Voici résumée leur analyse, présentée de façon à s'adapter à tous les cas possibles, et permettant de trouver immédiatement les éléments canoniques qui correspondent au choix particulier de variables qui vient d'être indiqué.

On suppose que la force F dérive d'une fonction de forces V qui peut dépendre des coordonnées rectangulaires x, y, z et du temps t . Conservant les notations précédentes, et appelant de plus ω et s la longitude et la latitude par rapport au plan Oxy , soit la fonction

$$\Phi = \int_{r_0}^r dr \sqrt{-Q^2 + \frac{2P}{r} - \frac{G^2}{r^2}} + H\omega + \int_0^s ds \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2 s}},$$

aux quatre paramètres G, H, P, Q et où r_0 est la plus petite valeur de r qui annule le premier radical.

Cette fonction est choisie, comme on sait, de façon à vérifier l'équation aux dérivées partielles de Jacobi

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 - \frac{2P}{r} + Q^2 = 0.$$

Si l'on établit une relation arbitrairement choisie entre G, H, P, Q de façon que ces quatre quantités soient fonctions de trois autres A, B, C , on peut faire sur les coordonnées polaires r, ω, s et leurs dérivées par rapport au temps le changement de variables

défini par les relations

$$\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}, \quad \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial B}, \quad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial C},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad r^2 \cos^2 s \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}, \quad r^2 \frac{ds}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

et les nouvelles variables $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ sont déterminées par le système canonique

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \Lambda}, \quad \frac{dA}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial U}{\partial B}, \quad \frac{dB}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \beta},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial U}{\partial C}, \quad \frac{dC}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \gamma},$$

où l'on a

$$U = \frac{P}{r} - \frac{Q^2}{r^2} - V.$$

Faisons

$$G = h, \quad H = h \cos i, \quad P = \frac{h^2}{p_0}, \quad Q = \frac{h \sqrt{1 - e^2}}{p_0},$$

$$r = \frac{p_0}{1 + e \cos f}, \quad \sin s = \sin i \sin(f + \omega),$$

$$\tan(\omega - \theta_0) = \cos i \tan(f + \omega);$$

d'après les formules de définition du changement de variables, il en résultera

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{p} e \sin f, \quad r^2 \cos^2 s \frac{d\omega}{dt} = h \cos i,$$

$$\frac{ds}{dt} = h \frac{\sin i \cos(f + \omega)}{r^2 \cos s},$$

ce qui montre que h est le moment de la vitesse de M par rapport au point O et que $p_0, e, f, \omega, i, \theta_0$ sont les éléments d'une section conique osculatrice au mouvement, ω désignant la distance du périhélie au nœud, soit $\varpi_0 - \theta_0$, avec les notations précédentes.

Si l'on désigne maintenant par ε et par M l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne correspondante à l'anomalie vraie f

dans la conique ainsi définie, qu'on suppose être une ellipse, on vérifie sans peine qu'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial G} = \omega, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial H} = \theta_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P} = \frac{\varepsilon}{Q}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Q} = -\frac{MP}{Q^2}.$$

Si alors G, H, P, Q sont des fonctions données de A, B, C , on a d'une façon générale pour déterminer les variables canoniques α, β, γ , conjuguées de A, B, C , les équations telles que

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \frac{\partial G}{\partial A} + \theta_0 \frac{\partial H}{\partial A} + \frac{\varepsilon}{Q} \frac{\partial P}{\partial A} - \frac{MP}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial A}, \\ \beta &= \omega \frac{\partial G}{\partial B} + \theta_0 \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{\varepsilon}{Q} \frac{\partial P}{\partial B} - \frac{MP}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial B}, \\ \gamma &= \omega \frac{\partial G}{\partial C} + \theta_0 \frac{\partial H}{\partial C} + \frac{\varepsilon}{Q} \frac{\partial P}{\partial C} - \frac{MP}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial C}. \end{aligned}$$

Prenant toujours

$$A = \frac{P}{Q}, \quad B = G, \quad C = H,$$

dans la méthode classique, on fait $P = \text{const.}$, et il vient

$$\alpha = M, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = \theta_0;$$

dans le cas indiqué par M. Levi-Civita, initiateur de ces nouvelles recherches, on a $Q = \text{const.}$ et par suite

$$\alpha = \varepsilon, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = \theta_0;$$

M. de Sitter prend à son tour $\frac{P}{Q^2} = \text{const.} = a$, en désignant par a le demi-grand axe de l'ellipse osculatrice, et alors

$$\alpha = 2\varepsilon - M, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = \theta_0;$$

enfin la méthode proposée par M. Andoyer donne

$$\frac{G^2}{P} = \text{const.} = p_0,$$

p_0 étant le paramètre de la conique osculatrice, et par suite

$$\alpha = M, \quad \beta = \omega + 2 \frac{\varepsilon - M}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \gamma = \theta_0.$$

Ces résultats, intéressants sans doute au point de vue théorique,

ne paraissent pas convenir aux applications d'ordre pratique que j'ai en vue, aussi n'insisterai-je pas davantage sur ce point.

3. Pour le calcul numérique direct des perturbations d'une petite planète, il y a lieu d'introduire au lieu de f l'anomalie moyenne M correspondante, ou plutôt au lieu de la longitude v une longitude moyenne l égale à $M + \varpi$.

Si ε désigne l'anomalie excentrique, on a donc

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = M,$$

et cette équation définit M en fonction de e et f puisqu'on a, d'autre part, les relations connues

$$\cos \varepsilon = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, \quad \sin \varepsilon = \frac{\sin f \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos f}.$$

Considérons pour un instant e et ε comme des variables indépendantes à l'aide desquelles sont exprimées M et f , on a

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned}$$

Éliminant $\frac{d\varepsilon}{dt}$, il vient

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}} \frac{df}{dt} + \frac{de}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial e} - \frac{\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial e} \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial e} &= -\sin \varepsilon = -\frac{\sin f \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos f}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} &= 1 - e \cos \varepsilon = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f}. \end{aligned}$$

D'autre part, la différentiation, par rapport à e et par rapport à ε , donne, en se servant toujours de valeur de $\sin \varepsilon$,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{\sin f}{1 - e^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 - e^2}};$$

donc

$$\frac{dM}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos f)^2} \frac{df}{dt} - \frac{\sin f (2 + e \cos f) \sqrt{1 - e^2}}{(1 + e \cos f)^2} \frac{de}{dt},$$

et finalement, d'après les valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ indiquées au n° 1, on a, pour remplacer l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2}$, après les réductions nécessaires, la nouvelle équation

$$\frac{dl}{dt} = \frac{h(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{p_0^2} - S_0 \left(\frac{2\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f} + \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} \cos f \right).$$

Posant donc pour un instant

$$n = \frac{h \cos^3 \varphi}{p_0^2},$$

on a encore, ainsi que l'indique sans démonstration M. Andoyer, dans son Mémoire,

$$\frac{dl}{dt} = n - S_0 \left(2 \cos \varphi \frac{r}{p_0} + \tan \frac{\varphi}{2} \cos f \right).$$

La quantité n n'est pas de l'ordre des perturbations, mais il en est ainsi de sa dérivée

$$\frac{dn}{dt} = n \left[\frac{2Q_0}{h} - 3S_0 \tan \varphi \sec \varphi \sin f \right].$$

4. Pour l'application des équations précédentes au calcul des perturbations d'une petite planète, il est encore nécessaire de faire d'abord une observation relative à la fonction S_0 .

La force agissante F se compose ici, l'origine O étant le Soleil, d'abord de l'attraction de cet astre, dirigée suivant MO , et égale à $\frac{k^2}{r^2}$, k étant la constante de Gauss définie plus haut, et les unités étant celles qu'on adopte d'habitude; en second lieu de la force perturbatrice proprement dite. Il en résulte que Q_0 et R_0 sont les projections de cette force perturbatrice sur la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de l'orbite instantanée et sur la normale à ce plan; mais que si P_1 désigne la projection de cette même force sur le rayon vecteur, on a

$$P_0 = -\frac{k^2}{r^2} + P_1.$$

Par suite,

$$S_0 = \frac{h^2 - p_0 k^2}{h r^2} + \frac{p_0}{h} P_1 - e \sin f \frac{r Q_0}{h}.$$

Si alors on pose $h = k\sqrt{p}$, où p remplace h , on aura

$$S_0 = \frac{k(p-p_0)}{r^2\sqrt{p}} + \frac{p_0}{h} P_1 - e \sin f \frac{r Q_0}{h}$$

et l'on déterminera directement p par l'équation

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2r\sqrt{p}Q_0}{k}.$$

5. Le calcul des composantes P_1 , Q_0 , R_0 se fait d'après des formules bien connues qu'il suffit de rappeler ici brièvement.

Le plan Oxy étant celui de l'écliptique à une époque donnée.

Soit M_1 une planète troublante de masse m_1 , dont le rayon vecteur, la longitude et la latitude dans le système d'axes employés soient r_1 , λ_1 , β_1 . On détermine d'abord sa longitude et sa latitude L_1 et B_1 par rapport au plan P de l'orbite de la planète troublée M , L_1 étant comptée à partir du nœud ascendant de ce plan, par les formules

$$\begin{aligned}\sin L_1 \cos B_1 &= \sin \beta_1 \cos i - \cos \beta_1 \sin i \sin(\lambda_1 - \theta), \\ \cos L_1 \cos B_1 &= \sin \beta_1 \sin i + \cos \beta_1 \cos i \sin(\lambda_1 - \theta), \\ \sin B_1 &= \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - \theta).\end{aligned}$$

Les coordonnées rectangulaires de M_1 par rapport au système d'axes formé par OM , la perpendiculaire à OM , OM' dans le plan P et la normale OM'' à ce plan sont alors

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u), \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u), \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1.\end{aligned}$$

Posant ensuite

$$\rho_1^2 = (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad K_1 = \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{r_1^3},$$

on a facilement

$$\begin{aligned}P_1 &= k^2 m_1 \left(K_1 \xi_1 - \frac{r}{\rho_1^3} \right), \\ Q_0 &= k^2 m_1 K_1 \eta_1, \\ R_0 &= k^2 m_1 K_1 \zeta_1.\end{aligned}$$

Bien entendu, si l'on considère l'action simultanée de plusieurs planètes perturbatrices, il faudra, pour obtenir les valeurs exactes des composantes P_1 , Q_0 , R_0 , faire la somme des termes analogues provenant de chaque planète.

6. La constante de Gauss k se rapporte au jour moyen comme unité de temps; si donc on prend pour nouvelle unité de temps un intervalle de $\mathfrak{C}$ jours moyens, il faudra avoir soin de remplacer k par $k\mathfrak{C}$, puisque les dimensions de k sont exprimées par la formule symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{C}^{-1}$; et s'il convient, pour la commodité du calcul, de compter le temps positivement vers le passé et non vers l'avenir, on prendra simplement $\mathfrak{C}$ négatif.

De même, il est usuel de rapporter n au jour moyen comme unité de temps; si celle-ci est multipliée par $\mathfrak{C}$, il faudra donc, pour conserver cette convention, remplacer dans les équations n par $n\mathfrak{C}$.

On a encore l'habitude d'exprimer les angles l , ϖ , θ , σ , φ , i en secondes d'arc; et l'on fait de même pour n , ainsi que pour $e = \sin \varphi$ et $j = \sin i$, s'il y a lieu d'employer ces quantités ou leurs équivalentes g , g' , q , q' . Il faut donc, pour qu'il en soit réellement ainsi, multiplier dans les équations tous ces nombres par $\sin 1''$. En tenant compte de ces remarques, si l'on garde i et φ comme variables, on aura finalement l'ensemble des équations suivantes, préparées pour le calcul numérique immédiat.

Appelant k'' la valeur de k en secondes, faisons d'abord

$$P = \frac{r}{\sqrt{p}} \sum k'' \mathfrak{C} m_1 \left(K_1 \xi_1 - \frac{r}{\rho_1^3} \right),$$

$$Q = \frac{r}{\sqrt{p}} \sum k'' \mathfrak{C} m_1 K_1 \tau_{11},$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{p}} \sum k'' \mathfrak{C} m_1 K_1 \zeta_{11},$$

$$S = \frac{k'' \mathfrak{C}}{r^2 \sqrt{p}} (p - p_0) + \frac{p_0}{r} P - \sin \varphi \sin f Q,$$

les sommations étant étendues aux diverses planètes perturbatrices.

On a alors

$$\frac{di}{dt} = R \cos u, \quad \frac{d\theta}{dt} = R \sin u \cot i, \quad \frac{d\tau}{dt} = R \sin u \tan \frac{i}{2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = S \sin f \sec \varphi, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -S \cos f \operatorname{cosec} \varphi, \quad \frac{dp}{dt} = 2pQ \sin i'',$$

$$\frac{dn}{dt} = n \sin i'' \left[Q - 3 \tan \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right],$$

$$\frac{dl}{dt} = n\mathfrak{C} - \left(2 \cos \varphi \frac{r}{\rho_0} + \tan \frac{\varphi}{2} \cos f \right) S,$$

et dans l'avant-dernière équation on peut multiplier les deux membres par $\mathfrak{C}$, de façon à avoir directement la quantité $n\mathfrak{C}$, qui figure directement dans la dernière.

Pour compléter ce Tableau, il suffit d'ajouter les formules intermédiaires, savoir

$$M = l - \varpi, \quad \varepsilon = \sin \varphi \sin \varepsilon = M, \quad n = \frac{k'' \sqrt{p} \cos^3 \varphi}{p_0^2},$$

$$u = f + \varpi - \theta, \quad \tan \frac{f}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \tan \frac{\varepsilon}{2},$$

$$r = \frac{p_0}{1 + \sin \varphi \cos f} = p_0 \sec^2 \varphi (1 - \sin \varphi \cos \varepsilon).$$

7. Pour appliquer cette méthode au calcul numérique des perturbations d'une petite planète, on peut alors procéder de la façon suivante :

Soient donnés les éléments osculateurs ordinaires de la planète pour une certaine date, prise comme origine de temps : ce sont avec les notations ordinaires, qu'il est inutile d'expliquer davantage,

$$l_0, \quad n_0, \quad p_0, \quad \varphi_0, \quad \varpi_0, \quad i_0, \quad \theta_0$$

sans confusion possible sur les significations de lettres ϖ_0, θ_0 employées déjà plus haut dans un autre sens.

Au demi-grand axe a_0 , on substitue le paramètre $p_0 = a_0 \cos^2 \varphi_0$;
on a d'ailleurs $n_0 = k'' p_0^{\frac{3}{2}} \cos^2 \varphi_0$.

Prenons alors pour notre constante p_0 précisément la valeur ci-

dessus et supposons que les valeurs initiales de nos variables $l, n, p, \varphi, \varpi, i, \theta$ sont justement les précédentes, celle de σ étant en outre zéro.

Si, à l'époque t exprimée à l'aide de l'unité choisie pour le temps, les valeurs de ces mêmes variables sont

$$\begin{aligned} l &= l_0 + n_0 \mathfrak{C} t + \delta l, & n &= n_0 + \delta n, \\ p &= p_0 + \delta p, & \theta &= \theta_0 + \delta \theta, & i &= i_0 + \delta i, \\ \varphi &= \varphi_0 + \delta \varphi, & \varpi &= \varpi_0 + \delta \varpi & \text{et} & \sigma. \end{aligned}$$

on a pour déterminer les perturbations

$$\delta_1 l, \quad \delta_2 l, \quad \delta n, \quad \delta p, \quad \delta \varpi, \quad \delta \varphi, \quad \delta \theta, \quad \delta i.$$

les formules

$$\begin{aligned} \delta i &= \int_0^t R \cos u \, dt, & \delta \theta &= \int_0^t R \sin u \cot i \, dt, \\ \sigma &= \int_0^t R \sin u \tan \frac{i}{2} \, dt, & \delta p &= \int_0^t 2 p Q \sin u'' \, dt, \\ \delta \varphi &= \int_0^t S \sin f \sec \varphi \, dt, & \delta \varpi &= \int_0^t -S \cos f \cos \sec \varphi \, dt, \\ \mathfrak{C} \delta n &= \int_0^t n \mathfrak{C} \sin u'' \left(Q - 3 \tan \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) dt, \\ \delta l &= \delta_1 l + \delta_2 l, & \delta_1 l &= \int_0^t \mathfrak{C} \delta n \, dt, \\ \delta_2 l &= \int_0^t - \left(2 \cos \varphi \frac{r}{p_0} + \tan \frac{\varphi}{2} \cos f \right) S \, dt. \end{aligned}$$

On observera d'ailleurs avec soin que S dépend de δp puisque

$$S = \frac{k'' \mathfrak{C} \delta p}{r^2 \sqrt{p}} + \frac{P_0}{r} P - \sin \varphi \sin f Q$$

et que, pour calculer le premier terme de S , il est nécessaire d'avoir une valeur de δp plus exacte que les valeurs des perturbations employées pour calculer les fonctions P, Q, R et les coefficients des formules et équations précédentes.

Il faut remarquer encore que n n'est qu'une quantité auxiliaire, sans signification spéciale, fonction de p et φ , qu'on pourrait supprimer sans inconvénient et qu'on a, à chaque instant, la relation

$$n = \frac{k'' \sqrt{p} \cos^3 \varphi}{p_0^2} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n_0} = \sqrt{\frac{p}{p_0}} \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^3 \varphi_0}.$$

Pour obtenir d'une façon plus exacte la relation entre les perturbations δn , δp , $\delta \varphi$, qui peut servir de vérification, écrivons par exemple

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi_0} = \left(\frac{n^2 p_0}{n_0^2 p} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

On a

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi_0} = 1 + \frac{\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} = 1 - \frac{\sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi + \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0}.$$

Faisant

$$\frac{n^2 p_0}{n_0^2 p} = 1 - \gamma,$$

de sorte que

$$\gamma = \frac{n_0^2 p - n^2 p_0}{n_0^2 p} = \frac{n_0^2 (p - p_0) - p_0 (n^2 - n_0^2)}{n_0^2 p} = \frac{\delta p}{p} - \frac{p_0 (n + n_0) \delta n}{p n_0^2},$$

il vient donc la formule de vérification

$$\sin \delta \varphi \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0} = 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{3}} = \frac{\gamma}{3} \left(1 + \frac{\gamma}{3} + \frac{5}{27} \gamma^2 + \frac{35}{324} \gamma^3 + \dots \right).$$

8. Rappelons brièvement comment l'on doit diriger le calcul, lorsqu'on procède par les quadratures mécaniques.

Le calcul doit se faire pour les valeurs de t , $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... auxquelles nous affecterons comme d'habitude les indices -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...

Pour intégrer une fonction $\mathbf{f}$ donnée par ses valeurs $\mathbf{f}_i$ correspondantes à ces époques, on envisage le Tableau bien connu de $\mathbf{f}_i$, de ses différences, de ses sommes premières et aussi de ses sommes secondes, s'il y a lieu de calculer l'intégrale seconde; ceci n'arrive dans notre cas que pour la fonction $\frac{d(\mathfrak{E} \delta n)}{dt}$.

Je représente ce Tableau par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \sigma_{-2}^2 & \sigma_{-\frac{3}{2}} & f_{-2} & \delta_{-\frac{3}{2}} & & & \\
 \sigma_{-1}^2 & \sigma_{-\frac{1}{2}} & f_{-1} & \delta_{-\frac{1}{2}} & \delta_{-1}^2 & \delta_{-\frac{1}{2}}^3 & \\
 \sigma_0^2 & \sigma_{\frac{1}{2}} & f_0 & \delta_{\frac{1}{2}} & \delta_0^2 & \delta_{\frac{1}{2}}^3 & \delta_0^4 \\
 \sigma_1^2 & \sigma_{\frac{3}{2}} & f_1 & \delta_{\frac{3}{2}} & \delta_1^2 & \delta_{\frac{3}{2}}^3 & \delta_1^4 \\
 \sigma_2^2 & \sigma_{\frac{5}{2}} & f_2 & \delta_{\frac{5}{2}} & \delta_2^2 & \cdot & \cdot \\
 \sigma_3^2 & \sigma_{\frac{7}{2}} & f_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \sigma_{\frac{9}{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Les limites inférieures de l'intégrale étant l'origine du temps, on détermine les constantes σ_{-1} , σ_0 par les formules suivantes, dont il est inutile de pousser plus loin le développement :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{24} \delta_{-\frac{1}{2}} + \frac{17}{5760} \delta_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots, \\
 \sigma_0 &= \frac{1}{24} f_{-1} - \frac{17}{5760} (2 \delta_{-1}^2 + \delta_0^2) + \dots
 \end{aligned}$$

Dans ces conditions :

1° Pour mettre le calcul en train, on dresse pour chaque fonction à intégrer le Tableau précédent, approché, en calculant seulement les quatre premières valeurs de f et en se servant pour cela, ainsi que pour le calcul de P, Q, R et des coefficients des formules et équations, des éléments osculateurs initiaux.

Le Tableau ainsi limité donne les valeurs approchées suivantes pour l'intégrale première φ de f et, s'il y a lieu, pour l'intégrale seconde ψ (φ_i et ψ_i représentent les valeurs de ces intégrales à l'époque t_i) :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{-2} &= \sigma_{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} f_{-2} - \frac{1}{12} \delta_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} \delta_{-1}^2 - \frac{19}{720} \delta_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots, \\
 \varphi_{-1} &= \sigma_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} f_{-1} - \frac{1}{12} \delta_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \delta_0^2 - \frac{19}{720} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \dots, \\
 \varphi_0 &= \sigma_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \delta_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_{-1}^2 - \frac{19}{720} \delta_{-\frac{3}{2}}^3 + \dots, \\
 \varphi_1 &= \sigma_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{12} \delta_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_0^2 - \frac{19}{720} \delta_{\frac{3}{2}}^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\psi_{-2} = \sigma_{-2}^2 + \frac{1}{12} f_{-2} - \frac{1}{240} \delta_{-2}^2 + \frac{1}{240} \delta_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

$$\psi_{-1} = \sigma_{-1}^2 + \frac{1}{12} f_{-1} - \frac{1}{240} \delta_0^2 + \frac{1}{240} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

$$\psi_0 = \sigma_0^2 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} \delta_1^2 + \frac{1}{240} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

$$\psi_1 = \sigma_1^2 + \frac{1}{12} f_1 - \frac{1}{240} \delta_0^2 + \frac{1}{240} \delta_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots,$$

et comme on ne possède que $\delta_{-\frac{1}{2}}^3$, on prendra, si c'est nécessaire, les autres différences troisièmes égales à celle-là.

Comme il a été dit, on se servira des valeurs approchées de δp ainsi déterminées pour calculer S et les intégrales qui en dépendent.

2° Si on le juge nécessaire, pour une plus grande exactitude, ce même calcul pourra être recommencé, en calculant cette fois P, Q, R et les coefficients des équations et formules avec les valeurs plus exactes des éléments de la planète, obtenues précédemment.

3° Le calcul étant en train, et les Tableaux formés jusqu'aux lignes qui dépendent des f_n , voici comment on le continuera en formant les f_{n+1} :

Pour calculer les fonctions P, Q, R et les coefficients des équations et formules correspondants à l'indice $n + 1$, on a besoin des valeurs au moins approchées des perturbations correspondants à cette époque, afin de se servir des éléments correspondants.

On se servira à cet effet des formules suivantes qu'on pourra abréger :

$$\varphi_{n+1} = \sigma_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f_n + \frac{5}{12} \delta_{n-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} \delta_{n-1}^2 + \frac{251}{720} \delta_{n-\frac{3}{2}}^3 + \frac{95}{288} \delta_{n-2}^4 \dots,$$

$$\psi_{n+1} = \sigma_{n+1}^2 + \frac{1}{12} f_n + \frac{1}{12} \delta_{n-\frac{1}{2}} + \frac{19}{240} \delta_{n-1}^2 + \frac{3}{40} \delta_{n-\frac{3}{2}}^3 + \frac{863}{12096} \delta_{n-2}^4 \dots$$

Et pour avoir la valeur plus exacte de δp , nécessaire au calcul de S, on prendra, après avoir calculé la valeur f_{n+1} correspondante,

$$\varphi_{n+1} = \sigma_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f_{n+1} - \frac{1}{12} \delta_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_n^2 - \frac{19}{720} \delta_{n-\frac{1}{2}}^3 - \frac{3}{160} \delta_{n-1}^4 \dots,$$

plus avantageuse que la précédente, comme on le voit en comparant les coefficients.

4° Pour avoir enfin les valeurs exactes des perturbations à l'époque $n + 1$ (n étant entier) à laquelle on peut faire correspondre l'indice $n + \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{n+\frac{1}{2}} &= \sigma_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \delta_{n+\frac{1}{2}} - \frac{17}{5760} \delta_{n+\frac{1}{2}}^3 + \frac{367}{967680} \delta_{n+\frac{1}{2}}^5 + \dots, \\ \psi_{n+\frac{1}{2}} &= \sigma_{n+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{24} \mathfrak{f}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{17}{1920} \delta_{n+\frac{1}{2}}^2 - \frac{367}{193536} \delta_{n+\frac{1}{2}}^4 + \dots,\end{aligned}$$

en appelant $\sigma_{n+\frac{1}{2}}^2, \mathfrak{f}_{n+\frac{1}{2}}, \dots$ les moyennes arithmétiques de $\sigma_n^2, \sigma_{n+1}^2, \mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}_{n+1}, \dots$

Ou bien, pour l'époque $n + \frac{1}{2}$ à laquelle correspond l'indice n , avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \sigma_n - \frac{1}{12} \delta_n + \frac{11}{720} \delta_n^3 - \frac{191}{60480} \delta_n^5 + \dots \\ \psi_n &= \sigma_n^2 + \frac{1}{12} \mathfrak{f}_n - \frac{1}{240} \delta_n^2 + \frac{31}{60480} \delta_n^4 + \dots\end{aligned}$$

Toutes ces formules sont bien connues : quelques-unes cependant ne se trouvent pas ordinairement dans les Ouvrages classiques, traitant de quadratures mécaniques; elles ont été indiquées en détail par M. Andoyer dans son cours du 1^{er} semestre 1913-1914.

Je me suis borné à indiquer le calcul exact des inconnues pour une époque de la forme $n + 1$ ou $n + \frac{1}{2}$; il serait aisé de l'indiquer pour une époque quelconque : c'est inutile au point de vue des applications.

9. Il faut maintenant indiquer comment on peut revenir des éléments, ainsi calculés pour une certaine époque, aux éléments osculateurs ordinaires que je désignerai en les affectant de l'indice 1.

$$l_1, \quad n_1, \quad a_1, \quad p_1, \quad \varphi_1, \quad \varpi_1, \quad i_1, \quad \theta_1,$$

et de même, s'il est nécessaire, $e_1, M_1, f_1, \varepsilon_1$ pour les trois ano-

malies; les notations sans indice restant celles relatives aux éléments calculés pour l'orbite de paramètre constant p_0 .

Il est préférable en général, d'ailleurs, d'indiquer comment des perturbations calculées $\delta_1 l$, $\delta_2 l$, δn , ..., on passera aux perturbations correspondantes des éléments ordinaires, soit $\Delta_1 l$, $\Delta_2 l$, Δn , ..., en faisant

$$l_1 = l_0 + n_0 \mathfrak{C} t + \Delta_1 l, \quad n_1 = n_0 + \Delta n, \quad \dots$$

On a d'abord manifestement

$$i_1 = i, \quad \theta_1 = \theta + \sigma.$$

Donc

$$\Delta i = \delta i, \quad \Delta \theta = \delta \theta + \sigma.$$

On a aussi $p_1 = p$ d'après la façon dont on a déterminé p , et le fait que h a la même valeur indépendante du choix des éléments osculateurs.

Donc

$$\Delta p = \delta p.$$

En écrivant l'identité des valeurs du rayon vecteur et de sa dérivée par rapport au temps, on a maintenant

$$1 + e_1 \cos f_1 = \frac{p}{p_0} (1 + e \cos f),$$

$$e_1 \sin f_1 = \frac{p}{p_0} e \sin f,$$

ou

$$e_1 \sin f_1 = e \sin f + \frac{\delta p}{p_0} e \sin f,$$

$$e_1 \cos f_1 = e \cos f + \frac{\delta p}{p_0} (1 + e \cos f).$$

Remplaçant $\frac{p_0}{1 + e \cos f}$ par r on introduit les auxiliaires b et β par

$$b \sin \beta = \frac{\delta p}{p_0} \sin f,$$

$$b \cos \beta = \frac{\delta p}{e r},$$

de sorte que

$$e_1 \sin f_1 = e \sin f + b e \sin \beta,$$

$$e_1 \cos f_1 = e \cos f + b e \cos \beta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} e_1 \sin(f_1 - f) &= be \sin(\beta - f), \\ e_1 \cos(f_1 - f) &= e + be \cos(\beta - f), \end{aligned}$$

et à nouveau après multiplication par

$$\sin \frac{f_1 - f}{2} \quad \text{et} \quad \cos \frac{f_1 - f}{2}$$

et addition

$$e_1 = e + \frac{be \cos\left(\beta - \frac{f_1 + f}{2}\right)}{\cos\left(\frac{f_1 - f}{2}\right)}.$$

On a donc pour déterminer les différences $f_1 - f$ et $e_1 - e$ exactement les formules

$$\tan(f_1 - f) = \frac{b \sin(\beta - f)}{1 + b \cos(\beta - f)}$$

et

$$e_1 - e = \Delta e - \delta e = \frac{be \cos\left(\beta - \frac{f_1 + f}{2}\right)}{\cos \frac{f_1 - f}{2}}.$$

Si l'on se sert plutôt des angles φ_1 et φ on aura, après avoir ainsi calculé $e_1 - e$ d'où l'on déduit φ_1 , une plus grande précision par la formule évidente

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi) = \sin \frac{1}{2} (\Delta \varphi - \delta \varphi) = \frac{e_1 - e}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi)}.$$

Égalant dans les deux systèmes les valeurs de la longitude dans l'orbite, on a ensuite

$$f + \varpi + \sigma = f_1 + \varpi_1,$$

et par suite

$$\varpi_1 - \varpi = \Delta \varpi - \delta \varpi = \sigma - (f_1 - f).$$

Comparant les formules qui donnent le moyen mouvement n_1 et n la quantité analogue, on a

$$\frac{n_1}{n} = \frac{p_0^2}{p^2} \frac{\cos^3 \varphi_1}{\cos^3 \varphi}.$$

Mais cette formule est peu propre à faire connaître avec précision Δn .

Passons par l'intermédiaire du demi-grand axe a , de l'ellipse osculatrice ordinaire.

On a

$$a_1 = \frac{p}{\cos^2 \varphi_1}, \quad a_0 = \frac{p_0}{\cos^2 \varphi_0}.$$

D'où l'on en déduit

$$\begin{aligned} \delta p &= a_1 \cos^2 \varphi_1 - a_0 \cos^2 \varphi_0 \\ &= \cos^2 \varphi_1 \Delta a + a_0 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_0) \\ &= \cos^2 \varphi_1 \Delta a - a_0 \sin(\varphi_1 + \varphi_0) \sin \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta a = \frac{\delta p}{\cos^2 \varphi_1} + \sin \Delta \varphi \frac{a_0 \sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_1}$$

ou

$$\frac{\Delta a}{a_1} = \frac{\delta p}{p} + \sin \Delta \varphi \frac{a_0 \sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{p} = \eta.$$

On peut écrire ensuite

$$\frac{n_1}{n_0} = \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$\frac{\Delta n}{n_0} = (1 - \eta)^{\frac{3}{2}} - 1 = -\frac{3}{2} \eta \left(1 - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta^2}{24} - \frac{\eta^3}{64}, \dots \right).$$

Il reste enfin à obtenir Δl .

On a

$$l_1 - l = \Delta l = (\pi_1 - \pi) + (M_1 - M).$$

Donc tout revient à calculer $M_1 - M$, c'est-à-dire d'après les équations de Képler correspondantes

$$\varepsilon_1 - \varepsilon = (e_1 \sin \varepsilon_1 - e \sin \varepsilon).$$

Reprenons les formules qui ont servi à déterminer e_1 et f_1 en introduisant les anomalies excentriques ε et ε_1 , c'est-à-dire en y remplaçant

$$1 + e \cos f \text{ par } \frac{\cos^2 \varphi}{1 + e \cos \varepsilon},$$

et

$$\frac{\sin f}{1 + e \cos f} \text{ par } \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}$$

et de même pour les quantités affectées de l'indice 1.

On aura

$$e_1 \sin \varepsilon_1 = e \sin \varepsilon \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi},$$

$$1 - e_1 \cos \varepsilon_1 = \frac{p_0 \cos^2 \varphi_1}{p \cos^2 \varphi} (1 - e \cos \varepsilon).$$

Par suite

$$e_1 \sin \varepsilon_1 = e \sin \varepsilon + e \sin \varepsilon \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{\cos \varphi},$$

$$e_1 \cos \varepsilon_1 = e \cos \varepsilon + \left(1 - \frac{p_0 \cos^2 \varphi_1}{p \cos^2 \varphi}\right) (1 - e \cos \varepsilon).$$

Remplaçons $1 - e \cos \varepsilon$ par $\frac{r \cos^2 \varphi}{p_0}$ et faisons comme précédemment

$$b' \sin \beta' = \sin \varepsilon \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} = -2 \sin \varepsilon \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\cos \varphi},$$

$$b' \cos \beta' = \frac{r}{ep_0} \left(\frac{\delta p}{p} \cos^2 \varphi + \frac{p_0}{p} \sin(\varphi_1 + \varphi) \sin \Delta \varphi \right),$$

on aura immédiatement comme plus haut

$$\tan g(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{b' \sin(\beta' - \varepsilon)}{1 + b' \cos(\beta' - \varepsilon)}$$

et l'on pourra retrouver $e_1 - e$ par la formule

$$e_1 - e = \frac{b' e \cos \left(\beta' - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{2} \right)}{\cos \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2}}.$$

On a ainsi $\varepsilon_1 - \varepsilon$; quant à $e_1 \sin \varepsilon_1 - e \sin \varepsilon$, c'est $b' e \sin \beta'$, de sorte que finalement

$$l_1 - l = \Delta l - \delta l = \sigma - (f_1 - f) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) - b' e \sin \beta'.$$

Le dernier terme de cette formule sera divisé par $\sin 1''$ pour l'exprimer en secondes.

10. Ce qui précède montre qu'à part le petit travail que

demande le retour aux éléments osculateurs ordinaires, l'application des formules est certainement plus simple que dans la méthode classique où l'on détermine les variations de ces éléments eux-mêmes.

Comme application numérique, j'ai choisi, afin d'obtenir des comparaisons et vérifications immédiates, celle même traitée par Oppolzer dans son *Traité de détermination des orbites des comètes et des planètes*. De plus, en procédant ainsi, j'ai trouvé tout fait le calcul des fonctions P, Q, R qui dépendent des perturbations de Jupiter et de Saturne, les seules planètes perturbatrices considérées.

Il s'agit de la planète (62) Erato. Le plan fondamental est l'écliptique moyenne 1870,0, l'époque de l'osculution est 1874 décembre 26,0 et pour cette époque on a

l_0	219. 8'. 6",8
φ_0	9.59.14,9
ϖ_0	38.27.17,9
i_0	2.12.23,9
θ_0	125.42.39,7
n_0	640",89605

d'où l'on déduit d'après les valeurs connues

$$\log k'' = 3,5500066,$$

$$p_0 = 3,035399.$$

Le calcul se fait de 40 en 40 jours, mais en remontant dans le temps; on a donc ici $\tau = -40$. Nos fonctions P, Q, R ne sont autres que celles désignées par R, S, W dans Oppolzer, changées de signe et multipliées par r .

J'ai poussé le calcul jusqu'à la date 1873 juillet 4, qui, en adoptant toutes les notations indiquées plus haut, correspond à l'indice 13; et j'ai obtenu en suivant toutes les notations données ci-dessus les Tableaux ci-après.

Il est presque superflu de dire que la dernière décimale n'est là que pour éviter l'accumulation des erreurs; elle n'est pas et ne peut pas être rigoureuse.

I.

$n.$		$\delta i.$	$\sigma^1.$	$\frac{d(\delta i)}{dt}$	$\partial^1.$	$\partial^2.$	$\partial^3.$	$\partial^4.$
— 2	1873. FÉVR. 24.....	+0",2		—0",238				
— 1	JANV. 15.....	+0,1	+0,135	—0,140	— 98	—24		
0	1874. DÉC. 6.....	+0,0	—0,005	—0,018	+122	+22	— 2	4
1	OCT. 27.....	+0,0	+0,103	+0,126	+144	+16	— 6	— 6
2	SEPT. 17.....	+0,2	+0,389	+0,286	+160	— 1	—12	— 2
3	AOUT 8.....	+0,6	+0,839	+0,450	+164	—10	—14	— 9
4	JUIN 29.....	+1,1	+0,839	+0,604	+154	—33	—23	— 6
5	MAI 20.....	+1,8	+1,443	+0,725	+121	—50	—17	— 3
6	AVRIL 10.....	+2,6	+2,168	+0,796	+ 71	—64	—14	+ 8
7	MARS 1.....	+3,4	+2,964	+0,803	— 7	—70	— 6	—21
8	JANV. 20.....	+4,1	+3,767	+0,740	— 63	—55	+15	+ 6
9	1873. DÉC. 11.....	+4,8	+4,507	+0,622	—118	—34	+21	+ 5
10	NOV. 1.....	+5,4	+5,129	+0,470	—152	— 8	+26	— 4
11	SEPT. 22.....	+5,8	+5,599	+0,310	—160	+14	+22	— 5
12	AOUT 13.....	+6,0	+5,909	+0,164	—146	+31	+17	
13	JUILL. 4.....	+6,1	+6,073	+0,049	—115			

Les valeurs de δi sont les valeurs approchées nécessaires à chaque époque pour continuer le calcul. De même dans les Tableaux suivants, en faisant attention aux explications complémentaires.

II.

n.		$\delta\theta.$	$\sigma^1.$	$\frac{d\delta\theta}{dt}.$	$\delta v.$	$\delta i.$	$\delta v.$	i.	$\sigma.$	$\sigma^1.$	$\frac{d\sigma}{dt}.$	$\delta v.$
— 2	1873. FÉVR. 24...	— 52,4	— 36,060	+ 32,017	+ 3,896	— 0,388			0,0	— 0,027	+ 0,024	+ 3
— 1	JANV. 15...	— 18,4	— 0,147	+ 35,913	+ 3,508	— 0,684	296	— 65	0,0	0,000	+ 0,027	+ 2
0	1874. DÉC. 6...	+ 19,3	+ 39,274	+ 39,421	+ 2,824	— 1,045	— 361	0	0,0	+ 0,029	+ 0,031	+ 2
1	OCT. 27...	+ 60,2	+ 81,519	+ 42,245	+ 1,779	— 1,406	— 361	+ 43	0,0	+ 0,060	+ 0,033	+ 2
2	SEPT. 17...	+ 103,5	+ 125,543	+ 44,024	+ 0,373	— 1,724	— 318	+ 153	+ 0,1	+ 0,093	+ 0,033	0
3	AOUT 8...	+ 147,8	+ 169,940	+ 44,397	— 1,351	— 1,889	— 165	+ 266	+ 0,1	+ 0,126	+ 0,032	— 1
4	JUN 29...	+ 191,6	+ 212,986	+ 43,046	— 3,240	— 1,788	+ 101	+ 377	+ 0,2	+ 0,138	+ 0,030	— 2
5	MAI 20...	+ 233,2	+ 252,792	+ 39,806	— 5,028	— 1,310	— 478	+ 137	+ 0,2	+ 0,188	+ 0,026	— 4
6	AVRIL 10...	+ 270,6	+ 287,570	+ 34,778	— 6,338	— 0,695	+ 615	+ 381	+ 0,2	+ 0,214	+ 0,021	— 5
7	MARS 4...	+ 302,3	+ 316,010	+ 28,140	— 7,033	+ 0,301	— 996	— 293	+ 0,2	+ 0,235	+ 0,016	— 5
8	JANV. 20...	+ 327,4	+ 337,417	+ 21,407	— 6,732	+ 1,004	+ 703	— 269	+ 0,3	+ 0,251	+ 0,011	— 5
9	1873. DÉC. 11...	+ 345,2	+ 352,092	+ 14,675	— 5,728	+ 1,438	— 434	— 364	+ 0,3	+ 0,262	+ 0,007	— 4
10	NOV. 4...	+ 357,2	+ 361,039	+ 8,947	— 4,290	+ 1,508	+ 70	— 280	+ 0,3	+ 0,269	+ 0,003	— 4
11	SEPT. 22...	+ 363,7	+ 365,696	+ 4,657	— 2,782	+ 1,298	210	— 0,3	+ 0,3	+ 0,272	+ 0,001	— 2
12	Aout 13...	+ 366,8	+ 367,571	+ 1,875	— 1,484				+ 0,3	+ 0,273		
13	JUILL. 4...	+ 367,8		+ 0,391					+ 0,3			

Ces premiers Tableaux ne sauraient différer de ceux d'Oppolzer puisque

$$i_1 \equiv i, \quad \theta_1 \equiv \theta + \sigma.$$

IV.

n .		$\delta\rho$.	σ .	$\frac{d(\delta\rho)}{dt}$.	δ_1 .	δ_2 .	δ_3 .	δ_4 .
— 2	1873. Févr. 24.....	—1545,7	—1050,00	+ 979,27	+ 68,46	—14,61	— 7,84	
— 1	JANV. 15.....	— 531,4	— 2,27	+1047,73	+ 53,85	—22,45	— 9,56	— 1,72
0	1874. Déc. 6.....	— 544,8	+1099,31	+1101,58	+ 31,40	—32,01	—10,29	— 0,73
1	Oct. 27.....	+1664,3	+2232,29	+1132,98	— 0,61	—42,30	— 9,21	+ 1,08
2	SEPT. 17.....	+2800,1	+3364,66	+1132,37	—42,91	—51,51	— 5,02	+ 4,19
3	AOÛT 8.....	+3915,0	+4454,12	+1089,46	— 94,42	—56,53	+ 2,91	+ 7,93
4	JUIN 29.....	+4961,9	+5449,16	+ 995,04	—150,95	—53,62	+13,67	+10,76
5	MAI 20.....	+5886,2	—6293,25	+ 844,09	—204,57	—39,95	+23,81	+10,14
6	AVRIL 10.....	+ 6632,1	+6932,77	+ 639,52	—244,52	—16,14	+29,14	+ 5,33
7	MARS 1.....	+7151,7	+7327,77	+395,00	—260,66	+13,00	+26,61	— 2,53
8	JANV. 20.....	+7416,5	+7462,11	+134,34	—247,66	+39,61	+17,05	— 9,56
9	1873. Déc. 11.....	+7424,7	+7426	—113,32	—208,05	+56,66	+ 4,67	—12,38
10	Nov. 1.....	+7203,2	+7348,79	—321,37	—151,39	+61,33	— 5,62	—10,29
11	SEPT. 22.....	—6801,0	+7027,42	—472,76	— 90,06	+55,71		
12	AOÛT 13.....	+6278,3	+6554,66	—562,82	— 34,35			
13	JUILL. 4.....	+5694,1	+5991,84	— 597,17				

Il y a deux colonnes pour $\delta\rho$; dans la première sont les valeurs plus exactes calculées pour former S; dans la seconde celles moins exactes pour le calcul des fonctions P, Q, R et des coefficients des équations et formules.

Ici l'unité est la sixième décimale.

V.

	$\delta\varphi$	σ^1	$\frac{d(\delta\varphi)}{dt}$	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4
1875.							
2 FÉVR. 24	— 0,7	— 0,540	+ 0,110	+ 0,488	— 1,905	— 0,254	— 0,111
1 JANV. 15	— 0,2	+ 0,058	+ 0,598	— 1,417	— 1,905	— 0,254	— 0,111
1874.							
0 DÉC. 6	— 0,2	— 0,761	— 0,819	— 3,576	— 2,159	— 0,143	+ 0,123
1 OCT. 27	— 2,6	— 5,156	— 4,395	— 5,878	— 2,302	— 0,020	+ 0,293
2 SEPT. 17	— 9,7	— 15,429	— 10,273	— 8,200	— 2,322	+ 0,273	+ 0,354
3 AOUT 8	— 23,9	— 33,902	— 18,473	— 10,249	— 2,049	+ 0,627	+ 0,394
4 JUIN 29	— 47,4	— 62,624	— 28,722	— 11,671	— 1,422	+ 1,021	+ 0,302
5 MAI 20	— 81,8	— 103,017	— 40,393	— 12,072	— 0,401	+ 1,323	+ 0,039
6 AVRIL 10	— 128,3	— 155,482	— 52,465	— 11,150	+ 0,922	+ 1,362	— 0,300
7 MARS 1	— 186,4	— 219,097	— 63,615	— 8,866	+ 2,284	+ 1,062	— 0,584
8 JANV. 20	— 254,6	— 291,578	— 72,481	— 5,520	+ 3,346	+ 0,478	— 0,679
1873.							
9 DÉC. 11	— 330,2	— 369,579	— 78,001	— 1,696	+ 3,824	— 0,201	— 0,512
10 NOV. 1	— 409,4	— 449,276	— 79,697	+ 1,927	+ 3,623	— 0,713	— 0,247
11 SEPT. 22	— 488,4	— 527,046	— 77,770	+ 4,837	+ 2,910	— 0,960	— 0,247
12 AOUT 13	— 564,1	— 599,979	— 72,933	+ 6,787	+ 1,950	— 0,960	— 0,247
13 JUILL. 4	— 633,8		— 66,146				

VI.

	$\delta\pi$	σ^1	$\frac{d(\delta\pi)}{dt}$	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4
1875.							
2 FÉVR. 24	+ 73,0	+ 67,117	— 4,391	— 59,975	— 5,901	+ 1,983	— 1,011
1 JANV. 15	+ 40,2	+ 2,751	— 64,366	— 65,876	— 5,901	+ 1,983	— 1,011
1874.							
0 DÉC. 6	— 56,7	— 127,491	— 130,242	— 69,794	— 3,918	+ 2,994	+ 1,236
1 OCT. 27	— 221,6	— 327,527	— 200,036	— 70,718	— 0,924	+ 4,230	+ 1,194
2 SEPT. 17	— 457,1	— 598,281	— 270,754	— 67,412	+ 3,306	+ 5,424	+ 0,787
3 AOUT 8	— 762,1	— 936,447	— 338,166	— 58,682	+ 8,730	+ 6,211	— 0,275
4 JUIN 29	— 1130,5	— 1333,295	— 396,848	— 43,741	+ 14,941	+ 5,936	— 1,766
5 MAI 20	— 1550,6	— 1773,884	— 440,589	— 22,864	+ 20,877	+ 4,170	— 3,413
6 AVRIL 10	— 2004,4	— 2237,337	— 463,453	+ 2,183	+ 25,047	+ 0,757	— 4,142
7 MARS 1	— 2468,8	— 2698,607	— 461,270	+ 27,987	+ 25,804	— 3,385	— 3,513
8 JANV. 20	— 2918,0	— 3131,890	— 433,283	+ 50,406	+ 22,419	— 6,898	— 1,617
1873.							
9 DÉC. 11	— 2328,1	— 3514,767	— 382,877	+ 65,927	+ 15,521	— 8,515	+ 0,530
10 NOV. 1	— 3679,4	— 3831,717	— 316,950	+ 72,933	+ 7,006	— 7,985	+ 2,177
11 SEPT. 22	— 3960,5	— 4075,734	— 244,017	+ 71,954	— 0,979	— 5,808	— 2,177
12 AOUT 13	— 4168,2	— 4247,797	— 172,063	+ 65,167	— 6,787		
13 JUILL. 4	— 4306,8		— 106,896				

VII.

n .		$\delta_1 l$.	σ_1 .	$\frac{d \cdot \delta l}{dt}$.	δ_1 .	δ_2 .	δ_3 .	δ_4 .
	1875.	"		"				
— 2	FÉVR. 24...	— 29,4	— 26,748	+ 1,763	+23,892	—2,333	—0,295	—0,33
— 1	JANV. 13...	— 16,0	— 1,093	+ 25,655	—26,225			—0,43
	1874.							—0,5
0	DÉC. 6...	+ 23,6	+ 50,787	+ 51,880	+28,263	—2,038	—0,649	—0,49
1	OCT. 27...	+ 88,4	+ 130,930	+ 80,143	—29,632	—1,389	—1,095	—0,5
2	SEPT. 17...	— 183,3	+ 240,725	+109,795	—29,946	—0,294	—1,642	—0,49
3	AOUT 8...	+ 308,2	+ 380,466	+139,741	—28,598	—1,348	—2,140	—0,23
4	JUIN 29...	+ 462,4	+ 548,805	+168,339	+25,110	—3,488	—2,379	—0,18
5	MAI 20...	— 643,6	+ 742,254	+193,449	—19,243	—5,867	—2,192	+ 1,09
6	AVRIL 10...	— 847,2	+ 954,946	+212,692	—11,184	—8,059	—1,096	—1,09
7	MARS 1...	+1066,3	+1178,822	+223,876	—2,029	—9,155	—0,075	—1,56
8	JANV. 20...	—1291,7	+1404,727	+225,905	—7,201	—9,230	+1,489	+1,1
	1873.							—0,07
9	DÉC. 11...	+1515,1	+1623,431	+218,704	—14,942	—7,741	—2,600	—0,13
10	NOV. 1...	+1726,6	+1827,193	+203,762	—20,083	—5,141	+2,572	—0,13
11	SEPT. 22...	+1921,0	+2010,872	—183,679	—22,652	—2,569	—2,413	
12	AOUT 13...	+2094,8	+2171,894	+161,027	—22,808	—0,156		
13	JUILL. 4...	+2242,7		+138,219				

VIII.

n .	$\delta_1 t$.	$\delta_2 \delta n$.	σ^2 .	σ^1 .	$\frac{d\delta_2 \delta n}{dt}$.	δ_1 .	δ_2 .	δ^1 .	δ^2 .
— 2	1873. FÉVR. 24.....	— 4,9	+ 6,48	— 4,5945	+ 4,3989	— 0,2564	— 0,0633	+ 165	
— 1	JANV. 15.....	— 0,6	+ 2,23	— 0,1956	+ 0,0134	— 0,3197	— 468	+ 366	+ 141
0	1874. DÉC. 6.....	— 0,6	+ 2,31	— 0,1822	— 4,6918	— 0,3665	— 162	+ 424	+ 118
1	OCT. 27.....	— 5,3	— 7,20	— 4,8740	— 9,7635	— 5,9717	— 262	+ 371	+ 147
2	SEPT. 17.....	— 15,1	— 12,46	— 14,6375	— 15,2179	— 5,4544	— 833	+ 631	+ 60
3	AOUT 8.....	— 30,3	— 18,10	— 29,8554	— 21,0288	— 5,8109	— 1461	+ 555	— 76
4	JUIN 29.....	— 51,4	— 24,05	— 50,8842	— 27,1129	— 6,0841	— 2019	+ 302	— 253
5	Mai 20.....	— 78,5	— 30,21	— 77,9971	— 33,3238	— 6,2109	— 2321	+ 117	— 419
6	AVRIL 10.....	— 111,8	— 36,40	— 111,3209	— 39,4596	— 6,1358	— 2304	— 527	— 410
7	MARS 4.....	— 151,3	— 42,40	— 150,7805	— 45,2882	— 5,8286	— 1677	— 841	— 314
8	JANV. 20.....	— 196,5	— 47,99	— 196,0687	— 50,5892	— 5,3010	— 836	— 25	— 25
9	1873. DÉC. 11.....	— 247,0	— 52,95	— 246,6579	— 55,1919	+ 0,6953	— 30	— 866	+ 184
10	NOV. 4.....	— 302,2	— 57,18	— 301,8528	— 59,0217	+ 0,7789	— 712	— 682	+ 285
11	SEPT. 22.....	— 361,1	— 60,62	— 360,8745	— 62,9726	— 3,0509	— 1109	— 397	
12	AOUT 13.....	— 423,2	— 63,31	— 422,9471	— 64,4188	+ 0,7047			
13	JUILL. 4.....	— 487,5	— 65,34	— 487,3659	— 66,1712	+ 0,5938			

11. De ces Tableaux on tire par exemple pour l'époque 1873 sept. 22,0 les valeurs

δi	+	0	5,77
$\delta \theta$	—	6.	3,66
$\delta \sigma$	+	0,27	
$\delta \varphi$	—	8.	8,46
$\delta \varpi$	—	1.	5.59,87
$\delta_1 l$	+	32.	0,85
$\delta_2 l$	—	6.	1,13
δn	—	60,60966	
δp	+	0,0068011	

On a alors pour les éléments osculateurs ordinaires

Δi	+	0	5,77
$\Delta \theta$	+0.	6.	3,93
$\Delta \varphi$	—	10.30,25	
$\Delta \varpi$	—	26.18,29	
Δl	+	25.20,53	
Δn		1,12526	

D'autre part, d'après les Tableaux d'Oppolzer, on trouve

Δi	+	0	5,77
$\Delta \theta$	+0.	6.	3,93
$\Delta \varphi$	—	10.30,24	
$\Delta \varpi$	—	26.18,29	
Δl	+	25.20,64	
Δn	—	1,12526	

En passant on peut comparer aussi les valeurs de f_1 et f , ε_1 et ε , M_1 et M déduites par le calcul direct et celles données par le calcul qu'on vient de faire.

$M_1 - M$	—40.20,66	—40.20,77
$\varepsilon_1 - \varepsilon$	—40.16,68	—40.16,81
$f_1 - f$	—39.41,19	—39.41,31
$\varpi_1 - \varpi$	+39.41,58	+39.41,58
$\varphi_1 - \varphi$	— 2.21,78	— 2.21,79
$l_1 - l$	— 0.39,08	— 0.39,19
$n_1 - n_0$	— 1,12526	— 1,12526

CHAPITRE II.

12. En terminant son Mémoire M. Andoyer indique que, dans le cas d'une comète à l'excentricité voisine de l'unité, il peut paraître plus avantageux de prendre constamment une parabole, comme orbite osculatrice. Dans ce cas la relation qu'on peut établir entre h , p_0 et e (voir n° 1) est simplement $e = 1$.

Cette suggestion peut être développée de deux façons. En premier lieu, imaginons, conformément à l'esprit de la méthode de détermination des orbites due à Laplace et reprise dans ces dernières années par M. Leuschner, qu'on ait observé à une époque donnée t_0 , l'ascension droite et la déclinaison géocentriques d'une comète, et qu'on connaisse aussi les dérivées premières et secondes de ces coordonnées par rapport au temps. Je fais ici abstraction, afin de ne pas compliquer inutilement cette exposition de principes, des difficultés d'ordre pratique qu'on rencontre pour réaliser exactement cette hypothèse, en particulier des corrections dues aux effets de la parallaxe et de l'aberration, des perturbations du mouvement du Soleil et aussi du fait que l'observation ne peut fournir que des valeurs approchées des dérivées, dont il vient d'être question.

Ces difficultés écartées une fois pour toutes, nous pouvons chercher les éléments du mouvement parabolique képlérien, d'un point vérifiant les conditions données, qui serait attiré par le Soleil suivant la loi de Newton, mais le coefficient d'attraction étant une sixième inconnue k_0^2 et non le carré k^2 de la constante de Gauss.

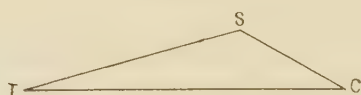
Le problème ainsi posé est entièrement déterminé, et dépend, comme nous allons le voir, d'une équation du troisième degré : il n'aura en général qu'une solution. Si l'on trouvait $k_0^2 = k^2$, ceci prouverait que l'orbite vraie de la comète, en négligeant les perturbations, est parabolique : si k_0^2 a une valeur voisine de k^2 , il est clair que l'orbite vraie est voisine d'une parabole, et l'on doit alors admettre que dans le voisinage de l'époque t_0 le mouvement

réel de la comète s'écartera peu du mouvement fictif correspondant à k_0 . On pourra donc construire une première éphéméride de la comète en partant de ce mouvement fictif, et l'on aura l'avantage d'avoir des calculs simples relatifs à la parabole, tandis que ceux relatifs à une ellipse de grande excentricité sont, comme on le sait, particulièrement pénibles.

13. Reprenons brièvement l'exposition des méthodes de Laplace et de M. Leuschner, suivant d'une façon générale la marche indiquée par M. Luc Picart dans son excellent *Manuel sur le calcul des Orbites et des Éphémérides*.

Soit à une époque donnée t_0 , TSC (*fig. 2*) le triangle formé

Fig. 2.



par la Terre, le Soleil et la comète.

En désignant par

X, Y, Z les coordonnées du Soleil par rapport à l'observateur et R la distance $\overline{TS}$;

x, y, z les coordonnées héliocentriques de la comète et r la distance $\overline{SC}$;

ξ, η, ζ les cosinus des angles formés par la direction $\overline{TC} = \rho$, qui joint l'observateur à la comète avec les axes de coordonnées;

on a

$$\begin{aligned} x &= \rho \xi - R, \\ y &= \rho \eta - Y, \\ z &= \rho \zeta - Z. \end{aligned}$$

Les équations connues du mouvement

$$\begin{aligned} x'' + \frac{k_0^2 x}{r^3} &= 0, \\ y'' + \frac{k_0^2 y}{r^3} &= 0, \\ z'' + \frac{k_0^2 z}{r^3} &= 0, \end{aligned}$$

en tenant compte des relations précédentes, ainsi qu'en remplaçant

$$X'', Y'', Z''$$

par

$$-\frac{k^2 X}{R^3}, \quad -\frac{k^2 Y}{R^3}, \quad -\frac{k^2 Z}{R^3},$$

ce qui suppose la position de l'observateur confondue avec celle du centre de gravité du système Terre-Lune, s'écrivent en vertu des hypothèses faites

$$\xi \rho'' + 2\xi' \rho' + \rho \left(\xi'' + \frac{k_0^2 \xi}{r^3} \right) - \frac{k_0^2 X}{r^3} + \frac{k^2 X}{R^3} = 0,$$

$$\eta \rho'' + 2\eta' \rho' + \rho \left(\eta'' + \frac{k_0^2 \eta}{r^3} \right) - \frac{k_0^2 Y}{r^3} + \frac{k^2 Y}{R^3} = 0,$$

$$\zeta \rho'' + 2\zeta' \rho' + \rho \left(\zeta'' + \frac{k_0^2 \zeta}{r^3} \right) - \frac{k_0^2 Z}{r^3} + \frac{k^2 Z}{R^3} = 0.$$

Ces équations contiennent les inconnues

$$\rho'', \quad \rho', \quad \rho \quad \text{et} \quad \frac{k_0^2}{r^3}.$$

En y faisant

$$r^2 = \rho^2 - 2\rho(\xi X + \eta Y + \zeta Z) + R^2,$$

puis en désignant par v la vitesse, l'équation des forces vives, sous la forme caractéristique pour le mouvement parabolique, est

$$v^2 = \frac{2k_0^2}{r},$$

avec

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Alors on écrit

$$\xi \left(\rho'' + \rho \frac{k_0^2}{r^3} \right) + 2\xi' \rho' + X \left(\frac{k^2}{R^3} - \frac{k_0^2}{r^3} \right) + \rho \xi'' = 0,$$

$$\eta \left(\rho'' + \rho \frac{k_0^2}{r^3} \right) + 2\eta' \rho' + Y \left(\frac{k^2}{R^3} - \frac{k_0^2}{r^3} \right) + \rho \eta'' = 0,$$

$$\zeta \left(\rho'' + \rho \frac{k_0^2}{r^3} \right) + 2\zeta' \rho' + Z \left(\frac{k^2}{R^3} - \frac{k_0^2}{r^3} \right) + \rho \zeta'' = 0,$$

et de ces équations linéaires en

$$\rho'' = \rho \frac{k_0^2}{r^3}, \quad \rho \rho', \quad \frac{k^2}{R^3} - \frac{k_0^2}{r^3},$$

on tire en résolvant

$$2\rho'|\xi\xi'\mathbf{X}| = -\rho|\xi\xi''\mathbf{X}|,$$

et

$$\left(\frac{k_0^2}{r^3} - \frac{k^2}{R^3}\right)|\xi\xi'\mathbf{X}| = \rho|\xi\xi'\xi''|,$$

où $|\xi\xi'\mathbf{X}|, \dots$, désigne sous forme abrégée d'écriture le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' & \mathbf{X} \\ \eta & \eta' & \mathbf{Y} \\ \zeta & \zeta' & \mathbf{Z} \end{vmatrix}.$$

Par suite on a

$$x' = \rho a - \mathbf{X}',$$

$$y' = \rho b - \mathbf{Y}',$$

$$z' = \rho c - \mathbf{Z}',$$

avec

$$a = \xi' - \frac{|\xi\xi''\mathbf{X}|}{2|\xi\xi'\mathbf{X}|} \xi,$$

$$b = \eta' - \frac{|\xi\xi''\mathbf{X}|}{2|\xi\xi'\mathbf{X}|} \eta,$$

$$c = \zeta' - \frac{|\xi\xi''\mathbf{X}|}{2|\xi\xi'\mathbf{X}|} \zeta,$$

d'où

$$(a^2 + b^2 + c^2)\rho^2 - 2\rho(a\mathbf{X}' + b\mathbf{Y}' + c\mathbf{Z}') + \mathbf{X}'^2 + \mathbf{Y}'^2 + \mathbf{Z}'^2 = \frac{2k_0^2}{r}.$$

Écrivant le deuxième membre de cette équation sous la forme

$$\frac{2k_0^2}{r^3} r^2,$$

c'est-à-dire

$$2\left(\frac{k^2}{R^3} - \rho \frac{|\xi\xi'\xi''|}{|\xi\xi'\mathbf{X}|}\right)[\rho^2 - 2\rho(\xi\mathbf{X} + \eta\mathbf{Y} + \zeta\mathbf{Z}) + \mathbf{R}^2],$$

on a

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)\rho^2 - 2\rho(a\mathbf{X}' + b\mathbf{Y}' + c\mathbf{Z}') + \mathbf{X}'^2 + \mathbf{Y}'^2 + \mathbf{Z}'^2 \\ = 2\left(\frac{k^2}{R^3} - \rho \frac{|\xi\xi'\xi''|}{|\xi\xi'\mathbf{X}|}\right)[\rho^2 - 2\rho(\xi\mathbf{X} + \eta\mathbf{Y} + \zeta\mathbf{Z}) + \mathbf{R}^2]. \end{aligned}$$

On voit que ρ est déterminée par une équation de troisième degré.

Connaissant ρ , tout le reste en résulte.

14. Voici comment on peut diriger le calcul, d'après M. Leuschner :

Si α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison données, on se sert non pas de δ , mais de $\tan \delta = \tau$; les données sont donc α , τ et leurs dérivées premières et secondes α' , τ' , α'' , τ'' .

On remplace aussi ρ par $\sigma = \rho \cos \delta$, c'est-à-dire par la distance géocentrique accourcie, projection de ρ sur le plan de l'équateur, et l'on emploie σ' au lieu de ρ' .

L'ascension droite et la déclinaison du Soleil sont A et D, de sorte que

$$X = R \cos D \cos A, \quad Y = R \cos D \sin A, \quad Z = R \sin D.$$

Rien n'est changé aux équations précédentes si l'on remplace partout ρ , ρ' , ξ , η , ζ par σ , σ' , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et τ , sauf que la somme

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

n'étant plus égale à 1, mais à $\sec^2 \delta$, on doit dans l'expression de r^2 remplacer ρ^2 par $\sigma^2 \sec^2 \delta$, elle devient donc

$$r^2 = \sigma^2 \sec^2 \delta - 2\omega \sigma R + R^2$$

en faisant

$$\omega = \tau \sin D + \cos D \cos(\alpha - A).$$

Ces substitutions faites, posons encore pour la commodité du calcul

$$M = \tan D - \tau \cos(\alpha - A),$$

$$N = \sin(\alpha - A),$$

$$P = \tau \alpha'^2 + \tau''.$$

il viendra

$$\begin{aligned} \left[\xi \xi' \xi'' \right] &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\alpha' \sin \alpha & -\alpha'' \sin \alpha - \alpha'^2 \cos \alpha \\ \sin \alpha & \alpha' \cos \alpha & \alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha \\ \tau & \tau' & \tau'' \end{vmatrix} \\ &= \tau (\tau' \alpha'' - \alpha' P), \\ \left[\xi \xi' X \right] &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\alpha' \sin \alpha & R \cos D \cos A \\ \sin \alpha & \alpha' \cos \alpha & R \cos D \sin A \\ \tau & \tau' & R \sin D \end{vmatrix} \\ &= \tau R (\alpha' M + \tau' N) \cos D, \\ \left[\xi \xi'' X \right] &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\alpha'' \sin \alpha - \alpha'^2 \cos \alpha & R \cos D \cos A \\ \sin \alpha & \alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha & R \cos D \sin A \\ \tau & \tau'' & R \sin D \end{vmatrix} \\ &= \tau R (\alpha'' M + P N) \cos D. \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma' = -\sigma \frac{\alpha'' M + P N}{2(\alpha' M + \tau' N)} = \lambda \sigma,$$

$$\frac{k_0^2}{r^3} = -\sigma \frac{\alpha' P - \tau' \alpha''}{R(\alpha' M + \tau' N) \cos D} + \frac{k^2}{R^3} = \mu \sigma + \nu,$$

en désignant par λ et μ les coefficients dans les deuxièmes membres, et en faisant $\nu = \frac{k^2}{R^2}$.

Ensuite on a

$$x' = \alpha \sigma - X',$$

$$y' = b \sigma - Y',$$

$$z' = c \sigma - Z'$$

et

$$\alpha = -\alpha' \sin \alpha + \lambda \cos \alpha,$$

$$b = +\alpha' \cos \alpha + \lambda \sin \alpha,$$

$$c = \tau' + \lambda \tau.$$

Si alors on fait

$$\alpha^2 + b^2 + c^2 = G,$$

$$\alpha X' + b Y' + c Z' = H,$$

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = K,$$

on voit que l'équation qui détermine σ sera, d'après ce qui précède,

$$G \sigma^2 - 2 H \sigma + K = 2(\mu \sigma + \nu)(\sigma^2 \sec^2 \delta - 2 \omega \sigma R + R^2).$$

Cette équation, dont la discussion générale paraît peu simple, sera résolue par l'une quelconque des méthodes d'approximations bien connues, ou même rigoureusement à l'aide de la trigonométrie.

15. Connaissant σ on en déduit immédiatement $x, y, z, x', y', z', r, r', k_0^2$.

Car on a

$$x = \sigma \cos \alpha - X, \quad x' = \alpha \sigma - X',$$

$$y = \sigma \sin \alpha - Y, \quad y' = b \sigma - Y',$$

$$z = \sigma \tau - Z, \quad z' = c \sigma - Z',$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2 \sec^2 \delta - 2 \omega \sigma R + R^2,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = G \sigma^2 - 2 H \sigma + K,$$

$$r r' = x x' + y y' + z z',$$

$$k_0^2 = (\mu \sigma + \nu) r^3 = \frac{r}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Cela étant, on a dans le mouvement parabolique considéré

$$r' = \frac{k_0}{\sqrt{p}} \sin f$$

et

$$r = \frac{p}{1 + \cos f},$$

où $p = 2q$ est le paramètre, q étant la distance périhélie, et f l'anomalie vraie.

Donc

$$\cos f = \frac{p}{r} - 1,$$

$$\sin f = \frac{r' \sqrt{p}}{k_0},$$

d'où

$$p = 2r - \frac{r^2 r'^2}{k_0^2}.$$

Puis facilement

$$\tan \frac{f}{2} = \frac{rr'}{k_0 \sqrt{p}}.$$

L'époque T du passage au périhélie en résulte

$$T = t_0 - \frac{p^2}{2k_0^3} \left(\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right).$$

Pour déterminer les éléments qui fixent la position de l'orbite et en même temps faciliter le calcul ultérieur de l'éphéméride de la comète, partons des formules qui expriment les coordonnées héliocentriques équatoriales à l'aide des constantes dites de *Gauss*

$$x = \alpha r \sin(\Lambda + f),$$

$$y = \beta r \sin(B + f),$$

$$z = \gamma r \sin(C + f).$$

On en déduit par dérivation, en remarquant que

$$r^2 f' = k_0 \sqrt{p},$$

$$\alpha \cos(\Lambda + f) = \frac{1}{f'} \left(\frac{x}{r} \right)' = \frac{rx' - xr'}{k_0 \sqrt{p}}$$

et de même

$$\beta \cos(B + f) = \frac{1}{f'} \left(\frac{r}{r'} \right)' = \frac{r y' - y r'}{h_0 \sqrt{p}},$$

$$\gamma \cos(C + f) = \frac{1}{f'} \left(\frac{z}{r} \right)' = \frac{r z' - z r'}{h_0 \sqrt{p}}.$$

On a ainsi

$$\alpha, \beta, \gamma \quad \text{et} \quad A, B, C.$$

On sait que

$$\begin{aligned} \alpha \sin(A - \omega) &= \cos \theta, \\ \alpha \cos(A - \omega) &= -\sin \theta \cos i, \\ \beta \sin(B - \omega) &= \sin \theta \cos \varepsilon, \\ \beta \cos(B - \omega) &= \cos i \cos \theta \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\ \gamma \sin(C - \omega) &= \sin \theta \sin \varepsilon, \\ \gamma \cos(C - \omega) &= \cos i \cos \theta \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \end{aligned}$$

où $\omega = \varpi - \theta$ est la distance du nœud au périhélie et ε est l'obliquité moyenne de l'écliptique.

Les inconnues en résultent de bien des façons. On a d'abord

$$\begin{aligned} \gamma \cos \varepsilon \cos(C - \omega) - \beta \sin \varepsilon \cos(B - \omega) &= \sin i, \\ \gamma \cos \varepsilon \sin(C - \omega) - \beta \sin \varepsilon \sin(B - \omega) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin i \sin \omega &= \gamma \cos \varepsilon \sin C - \beta \sin \varepsilon \sin B, \\ \sin i \cos \omega &= \gamma \cos \varepsilon \cos C - \beta \sin \varepsilon \cos B, \end{aligned}$$

puis

$$\sin \theta = \frac{\beta \sin(B - \omega)}{\cos \varepsilon} = \frac{\gamma \sin(C - \omega)}{\sin \varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \alpha \sin(A - \omega), \\ \cos i &= -\frac{\alpha \cos(A - \omega)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

On a ainsi tous les éléments sans ambiguïté et dans des bonnes conditions de calcul.

Comme autre vérification, on a encore

$$\tan g i = \frac{\beta \gamma \sin(C - B)}{\alpha \cos(A - \omega)}.$$

Pour calculer l'éphéméride on pourra se servir d'une Table de Barker sous une forme quelconque, mais en ayant soin de remar-

quer que l'argument de la Table proportionnel à

$$\operatorname{tang} \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{f}{2}$$

doit être multiplié pour l'usage actuel par $\frac{k_0}{k}$, car la Table est construite de façon à correspondre à la constante de Gauss.

16. J'ai appliqué ce qui précède à la comète Tuttle d'éléments

T = 1912 oct. 28,41055, t. m. de Paris.

θ	269.33.57 ⁰ ,0	} 1912,0
ϖ	116.25.26,5	
i	55. 0.23,8	
$\log q$	0,011909	
e	0,805516	

Afin de me placer dans les conditions théoriques indiquées précédemment, j'ai déduit directement les données rigoureuses de ces éléments, en calculant α et τ et leurs dérivées pour l'époque 1912 nov. 1,0. Le calcul se fait suivant des formules bien connues, qu'il est inutile de rappeler ici.

J'ai déduit alors les éléments paraboliques

T = 1912 oct. 28,61924, t. m. de Paris.

θ	263. 4.41 ⁰ ,5	} 1912,0
ϖ	111.13.35,0	
i	54.55.25,6	
$\log q$	0,061783	
e	1	
$\log k_0$	2.307050	

ainsi différents et j'ai formé l'éphéméride suivante :

	α .	δ .
1912. Oct. 17,0.....	148.14. 5 ⁰	+ 3.34.54 ⁰
22.....	151.42.39	— 2.22.51
27.....	155.16.20	— 8.28.17
Nov. 1.....	158.56.59	—14.34.21
6.....	162.46.15	—20.33.35
11.....	166.45.31	—26.18.56
16.....	170.55.57	—31.44.25

Comparant à l'éphéméride déduite directement des éléments réels, à savoir

	$\alpha.$	$\delta.$
1912. Oct. 17,0.....	148. ⁰ 13'.36"	+ 3.35'.38"
22.....	151.42.27	— 2.22.34
27.....	155.16.16	— 8.28.13
Nov. 1.....	158.56.59	—14.34.21
6.....	162.46.13	—20.33.34
11.....	166.45.24	—26.18.53
16.....	170.55.44	—31.44.27

on voit que les différences sont

	$\alpha_e - \alpha_p.$	$\delta_e - \delta_p.$
1912. Oct. 17,0.....	—29"	+44"
22.....	—12	+17
27.....	— 4	+ 4
Nov. 1.....	0	0
6.....	— 2	+ 1
11.....	— 7	+ 3
16.....	—13	— 2

Dans l'intervalle d'un mois elles n'atteignent pas une minute d'arc. Ceci justifie ce que nous avons dit : pour une première éphéméride on peut procéder sans inconvénient à l'aide d'une orbite parabolique dont k_0 est le sixième élément déterminé de façon à représenter exactement les données, bien que l'excentricité vraie s'éloigne notablement de l'unité.

17. En second lieu, quand il s'agit d'une comète d'éléments connus et d'excentricité voisine de l'unité, on peut représenter son mouvement troublé par une action perturbatrice, par un mouvement constamment parabolique.

Les calculs relatifs à une telle orbite seront de beaucoup plus simples que pour une orbite dont l'excentricité est très voisine de l'unité.

Reprenons toutes les notations précédemment employées au n° 1, en faisant $e = 1$. En supprimant l'indice 0 de p_0 , qui devient p , on a d'abord, d'après un calcul indiqué par M. Andoyer dans son

Mémoire,

$$\frac{di}{dt} = T_0 \cos u \sec i, \quad \frac{d\theta}{dt} = T_0 \sin u \cos \sec i,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = T_0 \tan \frac{i}{2} \sec i \sin u,$$

comme plus haut.

Puis

$$\frac{dp}{dt} = -p S_0 \tan \frac{f}{2}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -S_0, \quad \frac{dh}{dt} = r Q_0, \quad \frac{df}{dt} = \frac{h}{r^2} + S_0,$$

avec

$$S_0 = \frac{h}{r^2} + \frac{p}{h} P_0 - \sin f \frac{r Q_0}{h}.$$

Au lieu de f , c'est-à-dire l'anomalie vraie, il vaut mieux introduire l'époque T du passage au périhélie, déterminée par

$$t - T = \frac{p^2}{2h} \left(\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right).$$

On en déduit immédiatement

$$1 - \frac{dT}{dt} = (t - T) \left(\frac{2}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \right) + \frac{r^2}{h} \frac{df}{dt}.$$

Donc

$$\frac{dT}{dt} = (t - T) \left(\frac{r Q_0}{h} + 2 S_0 \tan \frac{f}{2} \right) - \frac{r^2}{h} S_0,$$

en n'oubliant pas que

$$r = \frac{p}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{f}{2} \right).$$

Les formules qui relient les éléments paraboliques ainsi employés aux éléments osculateurs ordinaires sont faciles à établir. Ceux-ci étant marqués de l'indice 1, ont d'abord comme avant

$$\theta_1 = \theta + \sigma, \quad i_1 = i, \quad p_1 = \frac{h^2}{k^2}.$$

Puis en faisant $\frac{p_1 - p}{p} = \varepsilon$ on a, comme au n° 9,

$$e_1 \sin f_1 = \sin f (1 + \varepsilon),$$

$$e_1 \cos f_1 = \cos f (1 + \varepsilon) + \varepsilon,$$

d'où

$$e_1^2 = 1 + 4\varepsilon(1 + \varepsilon) \cos^2 \frac{f}{2},$$

$$\sin(f_1 - f) = -\frac{\varepsilon}{e_1} \sin f$$

et

$$\varpi_1 - \varpi = \tau - (f_1 - f).$$

Quant à la date T_1 du passage au périhélie, elle résultera de la connaissance de f_1 et e_1 d'après le calcul relatif aux orbites fortement excentriques.

18. Inversement, connaissant les éléments elliptiques, on passe aisément aux éléments paraboliques; τ peut être choisi arbitrairement.

On a

$$h^2 = p_1 k^2.$$

Ensuite à cause de

$$\frac{\sin f}{p} = \frac{e_1 \sin f_1}{p_1}$$

et

$$\frac{p}{1 + \cos f} = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos f_1},$$

on a

$$\tan \frac{f}{2} = \frac{e_1 r_1 \sin f_1}{p_1},$$

$$p = 2 r_1 \cos^2 \frac{f}{2}.$$

Puis

$$\varpi - \varpi_1 = - (f - f_1)$$

et

$$k_0^2 = \frac{h^2}{p}.$$

Quant à T , date du passage au périhélie, elle résulte de la connaissance de f avec la même remarque qu'au n° 13.

19. Pour apprêter les formules du n° 18 au calcul je fais

$$h = k \sqrt{p_1},$$

de sorte que p_1 sera le paramètre de l'orbite elliptique ordinaire.

Ceci donne comme précédemment

$$\delta i = \int_0^t R \cos u \, dt, \quad \delta \theta = \int_0^t R \sin u \cot i \, dt,$$

$$\sigma = \int_0^t R \sin u \tan \frac{i}{2} \, dt, \quad \delta \varpi = \int_0^t -S \, dt,$$

$$\delta p_1 = \int_0^t 2p_1 Q \sin i'' \, dt, \quad \delta p = \int_0^t -p S \tan \frac{f}{2} \, dt,$$

$$\delta T = \int_0^t \left[(t - T) \left(Q - 2S \tan \frac{f}{2} \right) - \frac{r^2 S}{k \sqrt{p_1}} \right] dt.$$

avec

$$S = \frac{k \mathcal{C} (p_1 - p)}{r^2 \sqrt{p_1}} - \frac{P}{r} P - \sin f Q,$$

qui doit être divisée par $\sin i''$ pour avoir $\delta \varpi$ en secondes.

En particulier supposons la force perturbatrice nulle.

Alors

$$P = Q = R = 0, \quad \sigma = 0,$$

et l'on a

$$i_1, \quad \theta_1, \quad p_1 \text{ const.},$$

$$\delta \varpi = \int_0^t -S \, dt, \quad \delta p = \int_0^t -p S \tan \frac{f}{2} \, dt,$$

$$\delta T = \int_0^t \left[2(t - T) \tan \frac{f}{2} - \frac{r^2}{k \sqrt{p_1}} \right] S \, dt,$$

avec

$$S = \frac{k \mathcal{C} (p_1 - p)}{r^2 \sqrt{p_1}}$$

et l'on retrouve la parabole à chaque instant.

20. J'ai appliqué les formules de passage des éléments elliptiques aux éléments paraboliques à la comète 1911 V (Brooks) d'éléments

$T_1 = 1911 \text{ oct. } 27, 74483, \text{ t. m. de Paris.}$

$$\left. \begin{array}{ll} \theta_1 \dots \dots \dots & 292.56.57,1^{\circ} \\ \varpi_1 \dots \dots \dots & 85.58.24,3 \\ i_1 \dots \dots \dots & 33.48.12,8 \\ e_1 \dots \dots \dots & 0,99724 \\ \log q_1 \dots \dots \dots & 7,689688 \end{array} \right\} 1911,0$$

J'ai déduit alors des éléments paraboliques pour la date 1911 novembre 9, 24483

T = 1911 oct 27,76025, t. m. de Paris.

θ	292.56'.57",1	} 1911,0
ϖ	86. 2.40,6	
i	33.48.12,8	
$\log q$	1,689801	
$\log k_0$	2,235204	

D'autre part, d'après les équations indiquées à la fin du numéro précédent, en prenant $\mathfrak{C} = 5$ jours comme intervalle du temps et en disposant le calcul de façon que les intégrales s'annulent à l'époque du passage au périhélie, on a

	$\frac{d(\delta\varpi)}{dt}$.	$\frac{d(\delta T)}{dt}$.	$\frac{d(\delta p)}{dt}$.
1911. Oct. 20,24483.....	+101",66	+599,41	—125,43
23,24483.....	+107,64	+723,54	— 45,15
30,24483.....	+107,64	+723,54	+ 45,15
Nov. 4,24483.....	+101,66	+599,41	+125,43
9,24483.....	+ 92,41	+403,72	+183,58

d'où l'on trouve

$$\begin{aligned}\delta\varpi &= + 4' 16'',3 \\ \delta p &= +0,000254,8 \\ \delta T &= +0,01542\end{aligned}$$

En comparant ce résultat au précédent, on voit qu'on retrouve la même parabole à chaque instant.

Vu et approuvé :

Paris, le 15 décembre 1915.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 décembre 1915.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Fonctions de Bessel.

Vu et approuvé :

Paris, le 15 décembre 1915.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 décembre 1915.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}

56462 Quai des Grands-Augustins, 55.
